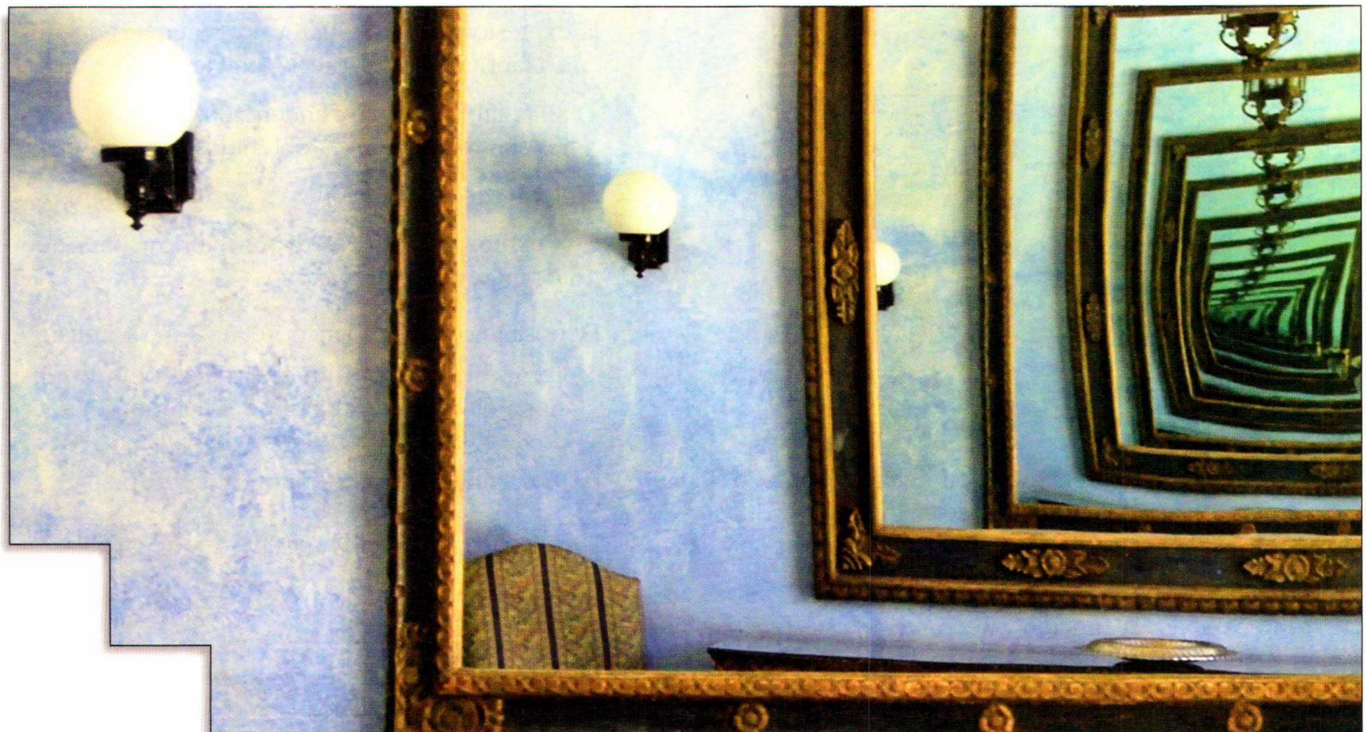
11 LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD Y RAMAS INFINITAS

El estado de reposo (inmovilidad) es desconocido en la naturaleza. Todo se mueve, todo cambia. El **límite de funciones** estudia, precisamente, los procesos de cambio. La idea de su tratamiento matemático es la siguiente: en ciertas situaciones no es posible obtener directamente el valor exacto de una magnitud; entonces, se obtienen sucesivas aproximaciones de ella. Esta cadena de aproximaciones, cada vez más precisas, permite determinar inequívocamente el valor buscado. (Es el estudio del proceso de aproximación el que nos proporciona, mediante su límite, el valor exacto).

El método matemático de paso al límite fue el fruto de la persistente labor de muchas generaciones sobre problemas que no podían resolverse por los sencillos métodos de la aritmética, el álgebra o la geometría elemental.

La humanidad llega a la idea de **continuidad** mediante la observación de procesos físicos. El concepto se va perfilando y se hace matemáticamente relevante al estudiar funciones que no son continuas en algunos de sus puntos. La descripción precisa de función continua requiere del proceso de paso al límite.

Los conceptos de límite y de continuidad recibieron una formulación precisa al comienzo del siglo XIX (Cauchy) y están estrechamente ligados al de número real.



REFLEXIONA Y RESUELVE

Aproximaciones sucesivas

El valor de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 45}{2x - 10}$ para $x = 5$ no se puede obtener porque el denominador se hace cero. Realizaremos una serie de aproximaciones sucesivas, dando a x los valores 4; $4{,}9$; $4{,}99$; …

- Comprueba que:

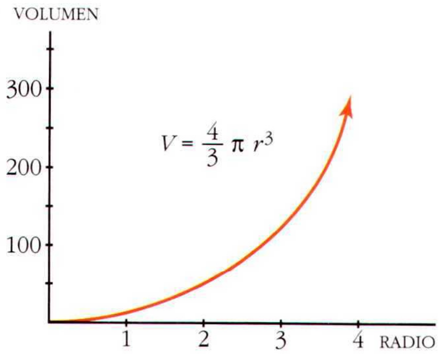
  $f(4) = 6{,}5$; $f(4{,}9) = 6{,}95$; $f(4{,}99) = 6{,}995$

- Calcula $f(4{,}999)$; $f(4{,}9999)$; $f(4{,}99999)$; …

- A la vista de los resultados anteriores, ¿te parece razonable afirmar que, cuando x se aproxima a 5, el valor de $f(x)$ se aproxima a 7? Lo expresamos así: $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 7$

- Calcula, análogamente, $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 6x - 27}{2x - 6}$.

Volúmenes de esferas

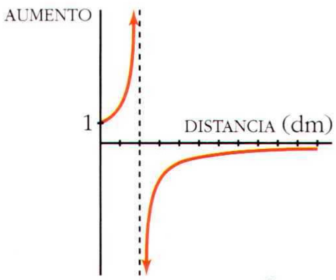


El volumen de una esfera depende de su radio. Podemos conseguir que el volumen de una esfera sea tan grande como queramos sin más que tomar el radio tan grande como sea necesario. Eso se expresa así:

$$\lim_{r \to +\infty} V = +\infty$$

A través de una lupa

En la página 247 vimos una situación similar a la siguiente:



$A = \dfrac{2}{2 - d}$ $\quad d$ = distancia, A = aumento

Si acercamos un objeto a una lupa hasta tocarla ($d = 0$), su tamaño se mantiene igual:

$$\lim_{d \to 0} A = 1$$

Sin embargo, si lo situamos a 2 dm, aproximadamente, se hace más y más grande, derecho o invertido, según que $d < 2$ o $d > 2$.

$$\lim_{d \to 2^-} A = +\infty \qquad \lim_{d \to 2^+} A = -\infty$$

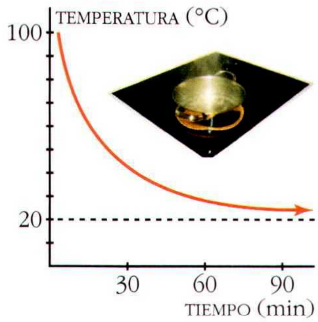
Si alejamos la lupa del objeto, este se ve cada vez más pequeño:

$$\lim_{d \to +\infty} A = 0$$

Templando el agua

Dejamos enfriar un cazo con agua hirviendo. Al pasar el tiempo, la temperatura del agua del cazo se aproxima a la temperatura ambiente (20 °C):

$$\lim_{t \to +\infty} T = 20$$



Ruido y silencio

Si acercamos la oreja a un foco de sonido, este se hace insoportable. Si la alejamos mucho, deja de oírse:

$$\lim_{d \to 0} I = +\infty \qquad \lim_{d \to +\infty} I = 0$$

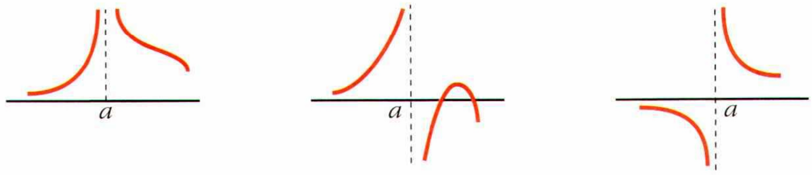
11.1 VISIÓN INTUITIVA DE LA CONTINUIDAD. TIPOS DE DISCONTINUIDADES

La idea de función continua es la de que "puede ser construida con un solo trazo". Vamos a obtener algunos criterios mediante los cuales podamos saber si una función, dada por su expresión analítica, es o no continua.

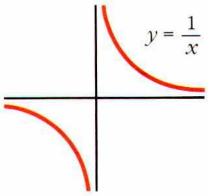
Discontinuidades

Empecemos observando gráficamente las *razones por las que una curva puede no ser continua en un punto.*

1. Tiene ramas infinitas en ese punto



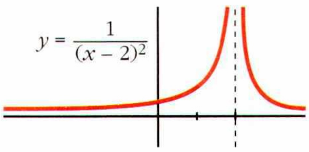
En estos casos, la recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la curva.



ASÍNTOTA VERTICAL EN $x = 0$

La función $y = 1/x$ presenta una discontinuidad de este tipo en la abscisa 0. Es decir, la recta $x = 0$ (el eje Y) es asíntota vertical.

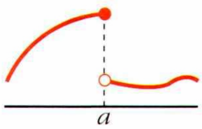
Análogamente, las funciones $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ pueden tener una asíntota vertical en los valores de x para los cuales el denominador es 0 $(Q(x) = 0)$.



ASÍNTOTA VERTICAL EN $x = 2$

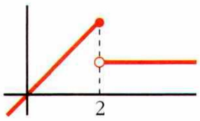
Por ejemplo, la función $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$. En ella, las dos ramas van hacia arriba.

2. Presenta un salto en ese punto



La función da un salto al llegar a la abscisa a. Entre las funciones elementales que nosotros manejamos, tal comportamiento solo se encuentra en funciones definidas "a trozos".

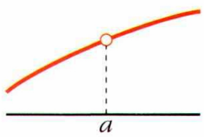
Por ejemplo, $y = \begin{cases} x, & x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$ es discontinua en $x = 2$ por este motivo.



$$y = \begin{cases} x, & \text{si } x \le 2 \\ 1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

SALTO EN $x = 2$

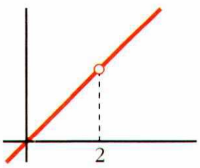
3. Le falta ese punto



La función no está definida en la abscisa a, pero no tiene ramas infinitas ni presenta salto. Esta discontinuidad se llama *evitable* porque bastaría añadir ese punto para que la función fuera continua.

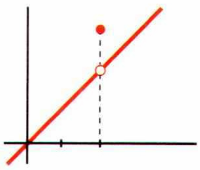
Por ejemplo, la función $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2}$ no está definida en $x = 2$, porque el denominador se anula. Sin embargo, para valores distintos de 2 podríamos simplificar la expresión: $y = \dfrac{x(x-2)}{x-2} = x$, si $x \neq 2$.

Es decir, la gráfica de esta función es como la de $y = x$, salvo que le falta el punto de abscisa 2.



$$y = \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = x, \text{ si } x \neq 2$$

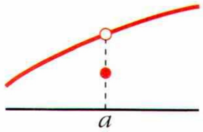
FALTA EL PUNTO DE ABSCISA 2



$y = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

PUNTO DE ABSCISA 2 DESPLAZADO

4. Tiene ese punto "desplazado"



Este caso es como el anterior, pero la función sí está definida en $x = a$, aunque el punto lo tiene desplazado. También este tipo de discontinuidad se llama *evitable*.

Este tipo de comportamiento solo puede conseguirse mediante funciones definidas "a trozos".

Por ejemplo, la función $y = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ presenta una discontinuidad de este tipo en el punto de abscisa 2.

Continuidad

TEN EN CUENTA

Las funciones

$$y = \frac{1}{x};\; y = \frac{1}{(x-2)^2};\; y = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

que están definidas de forma "natural" (sin el artificio de la definición "a trozos"), solo son discontinuas en los puntos donde no están definidas.

Como resulta obvio, una función es continua en un punto si no presenta ningún tipo de discontinuidad en él.

Es interesante observar que los ejemplos de funciones con discontinuidades de los tipos **1** y **3**, que son las únicas que se han podido definir de forma "natural", no están definidas en el punto en que son discontinuas. Esto es general y nos va a permitir dar un criterio, tan eficaz como sencillo, para identificar continuidades:

Las funciones definidas por expresiones analíticas elementales (es decir, todas las que conocemos hasta ahora) son continuas en todos los puntos en los que están definidas.

Por ejemplo, $f(x) = x^3 - 3x + 5$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$.

$g(x) = \dfrac{x+5}{x+3}$ es continua en todos los puntos, salvo en $x = -3$, donde no está definida.

$h(x) = \sqrt{x-4}$ es continua en $[4, +\infty)$, que es donde está definida.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y qué tipo de discontinuidad presenta:

a) $y = \dfrac{x+2}{x-3}$ b) $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x}$

c) $y = \dfrac{x^2 - 3}{x}$ d) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

2. Explica por qué son continuas las siguientes funciones y determina el intervalo en el que están definidas:

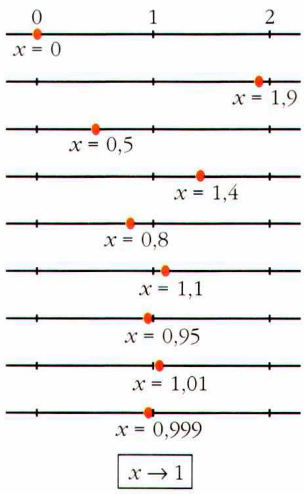
a) $y = x^2 - 5$ b) $y = \sqrt{5 - x}$

c) $y = \begin{cases} 3x - 4, & x < 3 \\ x + 2, & x \geq 3 \end{cases}$ d) $y = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & 2 \leq x < 5 \end{cases}$

11.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

El estudio de la continuidad en un punto y de las asíntotas verticales se realiza con más precisión conociendo el concepto de límite. Empecemos por entender qué significa que x se acerca a un cierto valor numérico:

X TIENDE A 1



$x \to c^-$ (x **tiende a** c **por la izquierda**) significa que a x se le dan valores cada vez más próximos a c, pero menores que c.

Por ejemplo, la secuencia 0; 0,5; 0,9; 0,95; 0,99;... está formada por números menores que 1 y cada vez más próximos a 1. Escribimos: $x \to 1^-$

$x \to c^+$ (x **tiende a** c **por la derecha**) significa que a x se le dan valores cada vez más próximos a c, pero mayores que c.

Si a x se le dan los valores 2; 1,5; 1,1; 1,01; 1,001;... escribiremos: $x \to 1^+$

$x \to c$ significa que a x se le dan valores cada vez más próximos a c. Se lee "x **tiende a** c".

Por ejemplo: 0; 1,9; 0,5; 1,4; 0,8; 1,1; 0,95; 1,01; 0,999;... es una secuencia de números cada vez más próximos a 1. Escribimos: $x \to 1$

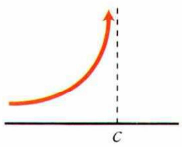
Significado de $\lim f(x)$ cuando $x \to c^-$

Si $x \to c^-$, entonces a x le damos valores variables. Como consecuencia, $f(x)$ también toma valores variables. El comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to c^-$, se expresa así:

$\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ (*límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* c *por la izquierda*)

y puede ser de una de las siguientes formas:

$\boxed{\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = +\infty}$



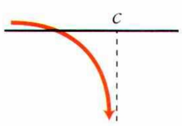
I $\boxed{\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = +\infty}$ Cuando $x \to c^-$, $f(x)$ toma valores cada vez más grandes, llegando a superar a cualquier valor, por grande que sea.

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

x	0	0,9	0,99	...
f(x)	1	100	10 000	...

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty}$



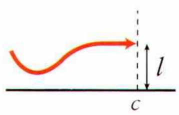
II $\boxed{\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty}$ Cuando $x \to c^-$, $f(x)$ toma valores cada vez "más negativos".

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

x	0	0,9	0,99	...
f(x)	–1	–10	–100	...

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = l}$



III $\boxed{\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = l}$ Cuando $x \to c^-$, $f(x)$ toma valores cada vez más próximos al número l.

Ejemplo: $f(x) = x^2 + 5$

x	0	0,9	0,99	...
f(x)	5	5,81	5,9801	...

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 6$

Las funciones que nosotros conocemos hasta ahora tienen uno de estos tres comportamientos cuando $x \to c^-$.

CON CALCULADORA

Comprueba que

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

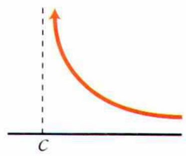
$$\lim_{x \to 1^+} (x^2+5) = 6$$

dando a x los valores

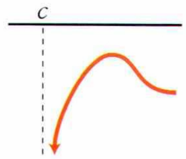
2; 1,5; 1,1; 1,01; 1,001; 1,0001…

Significado de $\lim f(x)$ cuando $x \to c^+$

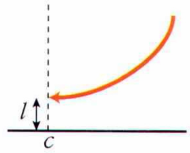
El significado de $\lim_{x \to c^+} f(x)$ (*límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* c *por la derecha*) es similar al del $\lim_{x \to c^-} f(x)$. Veamos gráficamente los tres comportamientos que pueden darse, idénticos a los vistos para $x \to c^-$.



$\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$

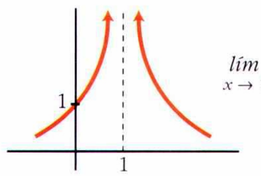


$\lim_{x \to c^+} f(x) = l$

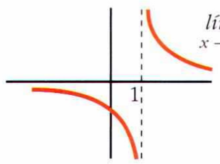
Los límites cuando $x \to c^-$ y $x \to c^+$ se llaman **límites laterales**.

Significado de $\lim f(x)$ cuando $x \to c$

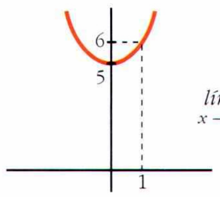
$\lim_{x \to c} f(x)$ (*límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* c), es el comportamiento de la función cuando x se aproxima a c tanto por la derecha como por la izquierda.



$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$



$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$ no existe

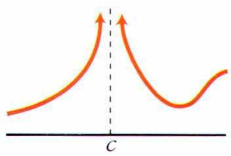


$\lim_{x \to 1} (x^2+5) = 6$

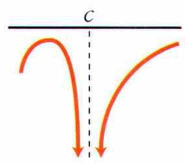
Si $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = l$, decimos que $\lim_{x \to c} f(x) = l$.

Análogamente, cuando los dos límites laterales son $+\infty$ o $-\infty$.

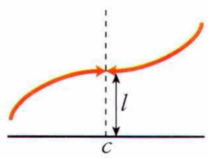
Si los dos límites laterales no toman el mismo valor, se dice que **no existe** el $\lim_{x \to c} f(x)$.



$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to c} f(x) = l$

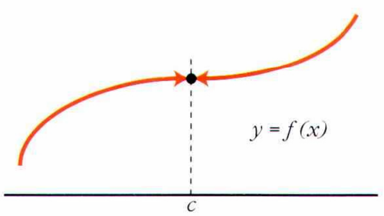
Relación de la continuidad en c con el límite cuando $x \to c$

Observando los distintos tipos de discontinuidad y el comportamiento de las funciones continuas, llegamos a la siguiente conclusión:

***f* es continua en $x = c$** si cumple las tres siguientes condiciones:

- Tiene límite finito cuando $x \to c$ ………… $\lim_{x \to c} f(x) = l$
- Está definida en $x = c$ ………… $f(c)$ existe
- El límite coincide con el valor de la función en c. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Observa que la igualdad final resume las tres condiciones, pues si se cumple la igualdad es porque existen sus dos miembros.



$y = f(x)$ es continua en c $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

11.3 CÁLCULO DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

El cálculo de límites de funciones en puntos concretos puede ser muy fácil o difícil, según los casos. Vamos a analizar distintas situaciones que nos permitirán reconocer qué proceso conviene seguir en cada caso.

Límite en un punto en el que la función es continua

Recordemos unos resultados que nos van a simplificar extraordinariamente el cálculo de algunos límites:

Si $f(x)$ es continua en c, entonces:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Las funciones que utilizamos habitualmente mediante su expresión analítica son continuas en todos los puntos en los que están definidas.

POR TANTO

Si $f(x)$ es una función habitual dada por su expresión analítica y existe $f(c)$, entonces para hallar:

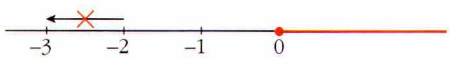
$$\lim_{x \to c} f(x)$$

calcularemos, sencillamente:

$$f(c)$$

OBSERVACIÓN

Cuando ponemos $x \to c$ hace falta que podamos "acercarnos a c cada vez más". Por ejemplo:



- Carece de sentido hablar de $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{x}$ porque, al ser el dominio de definición de $\sqrt{x}$ el conjunto $[0, +\infty)$, la x no puede tomar valores "cada vez más próximos a –3".

- Sí podemos hablar de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - x^2}{x^2}$ aunque 0 no sea del dominio de definición de esta función, $Dom = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, porque podemos dar a x valores de Dom tan próximos a 0 como queramos.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar los límites siguientes:*

a) $\lim\limits_{x \to 3} x^2$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5x}{x-5}$

c) $\lim\limits_{x \to 7} \sqrt{3x+4}$

d) $\lim\limits_{x \to \pi/4} (sen\, x + 3)$

a) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2) = 3^2 = 9$ (pues $f(x) = x^2$ es continua en $x = 3$).

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5x}{x-5} = \dfrac{5 \cdot 2}{2-5} = \dfrac{10}{-3} = -\dfrac{10}{3}$

Como dicha función está definida en $x = 2$, es continua en $x = 2$ y, entonces, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ coincide con el valor de la función, $f(2)$.

c) $\lim\limits_{x \to 7} \sqrt{3x+4} = \sqrt{3 \cdot 7 + 4} = 5$ (pues la función es continua en $x = 7$).

d) $\lim\limits_{x \to \pi/4} (sen\, x + 3) = sen\, \dfrac{\pi}{4} + 3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 3$ (pues $y = sen\, x + 3$ es una función continua).

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1)$

2. Calcula estos límites:

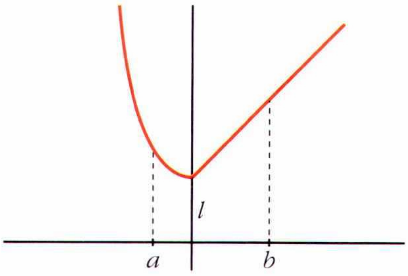
a) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

b) $\lim\limits_{x \to 0,1} log_{10} x$

POR EJEMPLO

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0 \\ x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

($y = x + 2$, $y = x^2 + 2$ son continuas en $x = 0$).



Cálculo de límites de funciones definidas "a trozos"

$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < c \\ f_2(x), & x \geq c \end{cases}$, f_1 y f_2 son funciones continuas en c.

- **Cálculo de $\lim f(x)$ en el punto de ruptura**

Como f_1 y f_2 son continuas, $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f_1(c)$ y $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f_2(c)$.

Regla práctica. Si $f_1(c) = f_2(c) = l$, entonces $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$.

Si $f_1(c) \neq f_2(c)$, entonces el límite no existe.

- **Cálculo de $\lim f(x)$ en otro punto cualquiera del dominio**

Para hallar el límite, procederemos así:

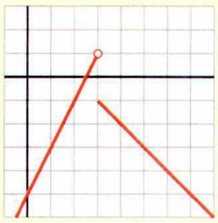
Si $a < c$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f_1(a)$ Si $b > c$, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f_2(b)$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar los límites de la función*

$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 2x - 5, & x < 3 \\ f_2(x) = -x + 2, & x \geq 3 \end{cases}$

en los puntos 3, 1 y 7.



- Veamos si coinciden los límites por la derecha y por la izquierda de 3:

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = f_1(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = f_2(3) = -3 + 2 = -1 \end{array}\right\}$ No coinciden. Por tanto, no existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

Como consecuencia, $f(x)$ no es continua en $x = 3$.

- Como $1 < 3$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} f_1(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x - 5) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$

- Como $7 > 3$, $\lim\limits_{x \to 7} f(x) = \lim\limits_{x \to 7} f_2(x) = \lim\limits_{x \to 7} (-x + 2) = -7 + 2 = -5$

2. *Averiguar si la función*

$g(x) = \begin{cases} x^3 - 5x + 3, & x \neq -2 \\ 5, & x = -2 \end{cases}$

es continua en $x = -2$.

Tanto $f_1(x) = x^3 - 5x + 3$ como $f_2(x) = 5$ son continuas en $x = -2$.

$f_1(-2) = (-2)^3 - 5(-2) + 3 = 5$; $f_2(-2) = 5$. Coinciden.

Por tanto, $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 5$ y la función es continua.

3. *Calcular el valor de n para que la función*

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1, & x \leq 4 \\ 2x + n, & x > 4 \end{cases}$

sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Cualquiera que sea n, $f(x)$ es continua en los puntos distintos de 4.

Puesto que $f(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 1 = -3$, ha de ser $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = -3$.

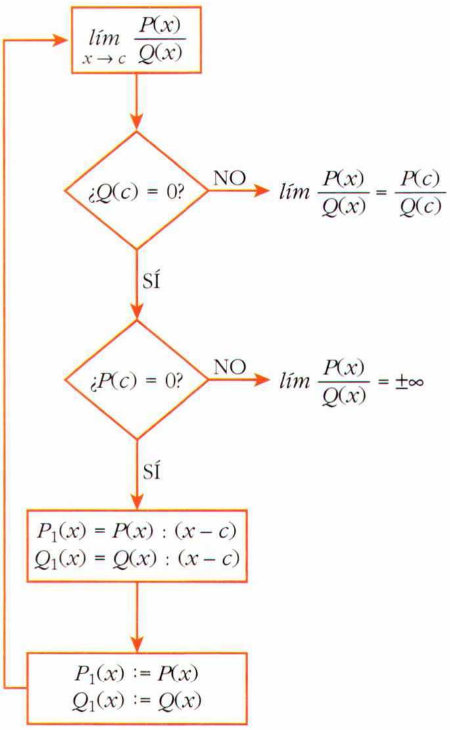
$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 1 = -3 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 2 \cdot 4 + n = 8 + n \end{array}\right\}$ $8 + n = -3 \Rightarrow n = -11$

EJERCICIOS PROPUESTOS

√ **3.** Calcula k para que la función $y = f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$

Límite del cociente de dos polinomios, $P(x)/Q(x)$

VISIÓN ESQUEMÁTICA DEL PROCESO



La expresión := significa "se pone en lugar de".

- Si **el denominador no se anula**, $Q(c) \neq 0$, la función es continua en c y, por tanto, el límite en c es el valor de la función en c.

Si $Q(c) \neq 0$, $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(c)}{Q(c)}$

- Si **el denominador se anula y el numerador no se anula**, el límite es infinito.

Si $P(c) \neq 0$ y $Q(c) = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$

En estos casos hay que estudiar los dos límites laterales. Este estudio puede hacerse con ayuda de la calculadora hallando el signo de $P(x)/Q(x)$ en puntos muy próximos a c, a ambos lados de él. Por ejemplo, en $c - 0{,}01$ y en $c + 0{,}01$.

- Si **tanto el numerador como el denominador se anulan**, entonces la expresión puede simplificarse.

Si $P(c) = 0$, $Q(c) = 0$, entonces el cociente puede simplificarse dividiendo numerador y denominador por $(x - c)$:

$$P(x) = (x - c) \cdot P_1(x) \qquad Q(x) = (x - c) \cdot Q_1(x)$$

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to c} \frac{(x - c) \cdot P_1(x)}{(x - c) \cdot Q_1(x)} = \lim_{x \to c} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Para hallar este nuevo límite, analizaremos en cuál de los tres casos se encuentra.

EJERCICIOS RESUELTOS

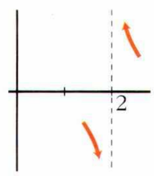
1. *Calcular el límite siguiente:*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x + 1}{x - 2}$$

Puesto que para $x = 2$ se anula el denominador pero no el numerador, el límite es $\pm\infty$. Estudiemos los límites por la izquierda y por la derecha del punto 2 para analizar sus signos:

IZDA.: $2 - 0{,}01 = 1{,}99$; $\dfrac{1{,}99 + 1}{1{,}99 - 2} = -299 < 0$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

DCHA.: $2 + 0{,}01 = 2{,}01$; $\dfrac{2{,}01 + 1}{2{,}01 - 2} = 301 > 0$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

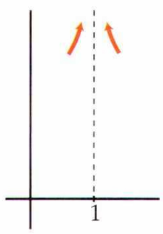


2. *Calcular el límite siguiente:*

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3}{(x - 1)^2}$$

Puesto que para $x = 1$ se anula el denominador y no el numerador, el límite es $\pm\infty$. Pero, además, tanto el numerador como el denominador son positivos en las proximidades del punto $x = 1$.

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3}{(x - 1)^2} = +\infty$



3. *Hallar el siguiente límite:*

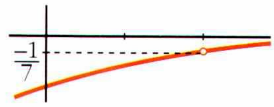
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10}$$

Para $x = 2$ se anulan el numerador y el denominador. Puede simplificarse la fracción dividiendo ambos por $(x - 2)$:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x+5)(x-2)} = \frac{x-3}{x+5}$$

Ya no se anula el denominador, y el límite puede obtenerse sustituyendo x por 2:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x+5} = -\frac{1}{7}$$



4. *Calcular los límites cuando $x \to 2$ y $x \to 3$ de la siguiente función:*

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$$

$\boxed{x \to 2}$ Tanto el numerador como el denominador se anulan para $x = 2$. Por tanto, podemos simplificar la fracción:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2-3x)}{(x-2)(x^2-5x+6)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 5x + 6}$$

Ahora, para $x = 2$, observamos que se anula el denominador pero no el numerador. Por tanto, los límites laterales son $\pm\infty$. Veamos sus signos:

A la izquierda: $x = 2 - 0{,}01 = 1{,}99 \to \dfrac{1{,}99^2 - 3 \cdot 1{,}99}{1{,}99^2 - 5 \cdot 1{,}99 + 6} = \dfrac{-}{+} = -$

A la derecha: $x = 2 + 0{,}01 = 2{,}01 \to \dfrac{2{,}01^2 - 3 \cdot 2{,}01}{2{,}01^2 - 5 \cdot 2{,}01 + 6} = \dfrac{-}{-} = +$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty. \quad \text{No existe } \lim_{x \to 2} f(x).$$

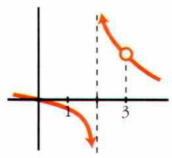
$\boxed{x \to 3}$ Tanto el numerador como el denominador se anulan para $x = 3$. Por tanto, podemos simplificar la fracción:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2-2x)}{(x-3)(x^2-4x+4)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$$

El denominador ya no se anula para $x = 3$.

Por tanto, para hallar el límite, simplemente sustituimos:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3}{3^2 - 4 \cdot 3 + 4} = 3$$



EJERCICIOS PROPUESTOS

4. Calcula los límites de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Donde convenga, especifica el valor del límite a la izquierda y a la derecha del punto. Representa gráficamente los resultados:

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ en -2, 0 y 2

b) $f(x) = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$ en 2, 0 y 3

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ en 1 y -3

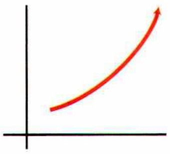
d) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 + 3x^2}$ en 0 y -3

11.4 COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCIÓN CUANDO $x \to +\infty$

Para expresar que damos a x valores cada vez más grandes, ponemos $x \to +\infty$ (x tiende a más-infinito). Por ejemplo, si damos a x los valores 10, 100, 1 000, 10 000, …, decimos que $x \to +\infty$.

Veamos posibles comportamientos de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

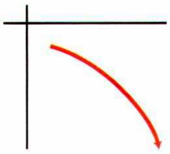


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Cuando $x \to +\infty$, los valores de $f(x)$ crecen cada vez más.

Por ejemplo, son de este tipo las funciones potencias, $y = x^n$; exponenciales, $y = a^x$, $a > 1$; raíces, $y = \sqrt[n]{x}$; logaritmos, $y = log_a x$, $a > 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

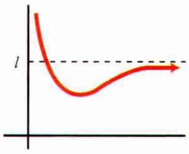


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Cuando $x \to +\infty$, los valores de $f(x)$ son cada vez "más negativos".

Como ejemplo, podríamos poner las funciones del ejemplo anterior precedidas del signo menos: $y = -x^4$, $y = -2^x$, $y = -\sqrt{x}$, $y = -log_3 x$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

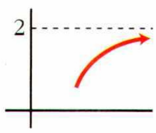


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

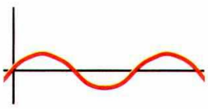
Cuando $x \to +\infty$, los valores de $f(x)$ son cada vez más próximos a un número l. En tal caso, se dice que la recta $y = l$ es una **asíntota horizontal** de la curva.

Por ejemplo, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3}{x^2 + 5} = 2$. Veámoslo con ayuda de la calculadora:

x	10	100	1 000	10 000	…
$\dfrac{2x^2 - 3}{x^2 + 5}$	1,876	1,9987	1,999987	1,99999987	…



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ no existe



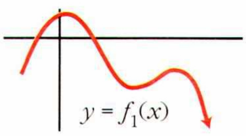
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ no existe

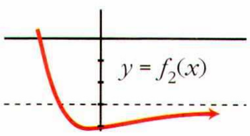
Cuando $x \to +\infty$, los valores de $f(x)$ ni crecen ni decrecen indefinidamente, ni se acercan cada vez más a ningún número.

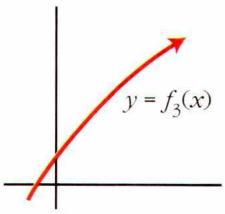
Por ejemplo, las funciones trigonométricas presentan este comportamiento, pues oscilan indefinidamente.

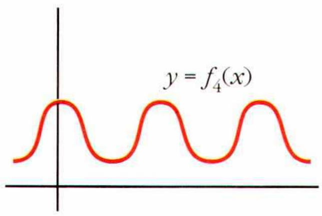
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Di el límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:









11.5 CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO $x \to +\infty$

Al igual que en los límites en un punto, el cálculo de límites cuando $x \to +\infty$ presenta una variada casuística, que depende del tipo de funciones que se presenten. Veamos las más importantes para este nivel.

NOTACIÓN

En lugar de decir que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

podemos decir que

"$f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$"

o bien

"$f(x) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$"

Límites de funciones polinómicas

Las siguientes funciones, evidentemente, tienden a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$:

$$f(x) = x^2 \qquad f(x) = x^4 + 17 \qquad f(x) = x - 3 \qquad f(x) = x^3 - x^2$$

Acaso resulte menos evidente pero, reflexionando, también es claro que tienden a $+\infty$ las siguientes funciones:

$$f(x) = 2x^2 - 40x \qquad f(x) = 3x^4 - 1\,000\,000 \qquad f(x) = x^3 - 1\,000x^2$$

Se puede comprobar dando a x valores suficientemente grandes.

Si a las funciones anteriores les cambiamos el signo, tienden a $-\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} (-3x^4 + 1\,000\,000) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} (-x^3 + 1\,000x^2) = -\infty$$

En general, podemos afirmar que:

El límite cuando $x \to +\infty$ de una función polinómica es $+\infty$ o $-\infty$, según que el coeficiente del término de mayor grado sea positivo o negativo.

Por ejemplo: $\lim_{x \to +\infty} (3x^4 - 5x^3) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} (-5x^3 + 7x^2 + 9) = -\infty$

REFLEXIÓN IMPORTANTE

Cuando $x \to +\infty$, el protagonismo de una función polinómica lo desempeña su término de mayor grado, pues, para valores grandes de x, el valor de las potencias de grado inferior es insignificante comparado con el suyo.

Por ejemplo:

$$x^3 - 20x^2$$

Para $x = 100$:

$$\begin{aligned} x^3 &= 1\,000\,000 \\ -20x^2 &= -\,200\,000 \\ \hline x^3 - 20x^2 & \quad 800\,000 \end{aligned}$$

Límites de funciones inversas de polinómicas

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, entonces $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, pues al dividir 1 por un número cada vez más grande, el cociente es cada vez más próximo a cero.

Si $P(x)$ es una función polinómica, entonces $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{P(x)} = 0$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Di el valor del límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$ b) $f(x) = 5x^3 + 7x$

c) $f(x) = x - 3x^4$ d) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$

e) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ f) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{-5}$

2. Como $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 200x^2) = +\infty$, halla un valor de x para el cual sea $x^3 - 200x^2 > 1\,000\,000$.

3. Como $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 - 10x} = 0$, halla un valor de x para el cual sea $\dfrac{1}{x^2 - 10x} < 0{,}0001$.

Límites de funciones racionales: $P(x)/Q(x)$

EJEMPLO

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^4 - 300x^2 - 40}{3x^3 + 500x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^4}{3x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{3} = +\infty$$

Hemos visto que, cuando $x \to +\infty$, el protagonismo de una función polinómica lo desempeña el término de mayor grado.

De igual modo, en el límite cuando $x \to +\infty$ de un cociente de polinomios, solo importarán los términos de mayor grado del numerador y del denominador. Por tanto, podemos dar la siguiente regla para hallar límites $(x \to +\infty)$ de funciones racionales:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a x^m + \dots}{b x^n + \dots}$$

- Si *grado de P > grado de Q* (es decir, $m > n$), entonces

  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty \quad \left(\text{el signo es el de } \frac{a}{b}\right)$.

- Si *grado de P < grado de Q* ($m < n$), entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
- Si *grado de P = grado de Q* ($m = n$), entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a/b$.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar el límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 3}{3x - 5}$

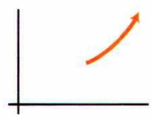
b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^3}$

c) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 - 6}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{-x^3}$

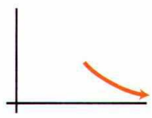
a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 3}{3x - 5} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{3x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{3} = +\infty$

Como el grado del numerador es mayor que el del denominador y, además, los coeficientes de los términos de mayor grado son ambos positivos, el límite es $+\infty$.

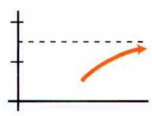


b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

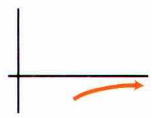
El límite es 0, pues *grado de P(x) < grado de Q(x)*.



c) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 - 6} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{2x^2} = \dfrac{3}{2}$



d) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3}{-x^3} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{-x^3} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{-x} = 0$



EJERCICIOS PROPUESTOS

4. Calcula $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:

a) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ b) $f(x) = \dfrac{3}{x}$

c) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ d) $f(x) = 3x - 5$

5. Calcula $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{-5}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$

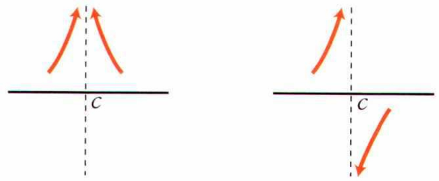
c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ d) $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}$

11.6 RAMAS INFINITAS. ASÍNTOTAS

ETIMOLOGÍA

Asíntota deriva del griego *asumptotos*, que significa *sin encontrarse*.
Pues la asíntota se acerca a la curva "sin encontrarla", sin juntarse a ella.

A lo largo de esta unidad nos hemos encontrado varias veces con **ramas infinitas**, es decir, tramos de curva que se alejan indefinidamente. Cuando una rama infinita se ciñe (se aproxima) a una recta, a esta se la llama **asíntota** de la curva y a la rama correspondiente se la llama **rama asintótica**. Vamos a estudiar con detalle los tipos de ramas infinitas.



Para averiguar si el límite es $+\infty$ o $-\infty$, calcularemos el valor de $f(x)$ en puntos próximos a c (con ayuda de la calculadora).

Ramas infinitas en $x = c$. Asíntotas verticales

Las únicas ramas infinitas que pueden darse en valores concretos de la abscisa, $x = c$, son las ramas asintóticas verticales.

En una función hay asíntota vertical en $x = c$ si $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \pm\infty$.

Si $f(x) = P(x)/Q(x)$ es una función racional simplificada (cociente de dos polinomios sin raíces comunes), sus asíntotas verticales se encuentran en los valores de x que son raíces del denominador. Se hallan resolviendo la ecuación $Q(x) = 0$.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar las asíntotas verticales de las funciones siguientes:*

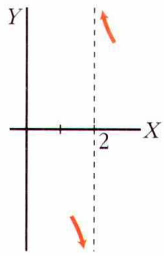
a) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$

b) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$

Estudiar, en cada caso, la posición de la curva respecto a la asíntota.

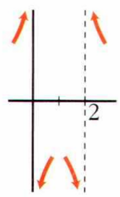
a) $x = 2$ es raíz del denominador y no lo es del numerador. Veamos la posición de la curva respecto a esta asíntota estudiando sus signos en valores próximos a $x = 2$, por la derecha y por la izquierda:

	$x \to 2^-$	$x \to 2^+$
VALOR DE x	1,99	2,01
VALOR DE $f(x)$	$\dfrac{1{,}01}{-0{,}01} < 0$	$\dfrac{0{,}99}{0{,}01} > 0$
CONCLUSIÓN	$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$



b) El denominador tiene dos raíces: $x = 0$, $x = 2$

	$x = 0$: $x \to 0^-$	$x = 0$: $x \to 0^+$	$x = 2$: $x \to 2^-$	$x = 2$: $x \to 2^+$
x	$-0{,}01$	0,01	1,99	2,01
$f(x)$	$\dfrac{1{,}0001}{0{,}0201} > 0$	$\dfrac{1{,}0001}{-0{,}0199} < 0$	$\dfrac{4{,}9601}{-0{,}0199} < 0$	$\dfrac{5{,}0401}{0{,}0201} > 0$
CONCLUSIÓN	$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

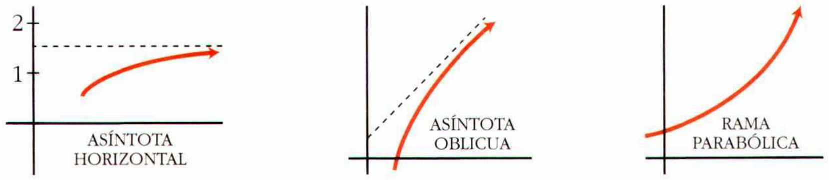
a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ b) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$

2. Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ b) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1}$

Ramas infinitas cuando $x \to +\infty$

Hay varios tipos de ramas infinitas cuando $x \to +\infty$. Veamos las más importantes:



RECUERDA

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \to$ ASÍNTOTA HORIZONTAL

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty \begin{cases} \text{ASÍNTOTA OBLICUA} \\ \text{o} \\ \text{RAMA PARABÓLICA} \end{cases}$

Asíntota horizontal. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, entonces la recta $y = l$ es asíntota de la función.

Asíntotas oblicuas. Hay funciones $y = f(x)$ que, cuando $x \to +\infty$, se aproximan mucho a una recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, ciñéndose a ella. Dicha recta es una asíntota oblicua.

Ramas parabólicas. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ y la curva no tiene asíntota oblicua, entonces la curva presenta una rama parabólica. Hay dos tipos:

TIPO 1 TIPO 2

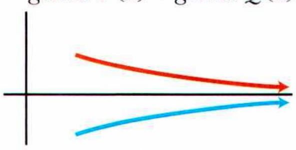
La curva crece, o decrece, cada vez más deprisa. De este tipo son las ramas parabólicas de las funciones **polinómicas** y **exponenciales**.

La curva crece, o decrece, cada vez más despacio. De este tipo son las funciones **radicales** y las **logarítmicas**.

Obtención de ramas infinitas $(x \to +\infty)$ en funciones racionales

Si $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional, para hallar su rama infinita cuando $x \to +\infty$, procederemos del siguiente modo:

grado $P(x)$ < *grado* $Q(x)$



El eje X es **asíntota horizontal**. La curva se le acerca por arriba o por abajo.

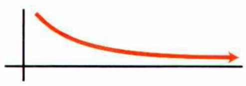
I. *grado de* $P(x)$ < *grado de* $Q(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$. La recta $y = 0$ (eje X) es **asíntota horizontal**.

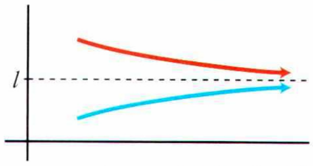
Para hallar la posición de la curva respecto de la asíntota, estudiaremos el signo de $P(x)/Q(x)$ para un valor grande de x.

Por ejemplo, en $y = \dfrac{3x - 5}{x^2 + 3x + 2}$, el eje X es asíntota horizontal.

Es evidente que, para valores grandes de x, tanto el numerador como el denominador son positivos. Por tanto, la curva está por encima de la asíntota horizontal.



grado $P(x)$ = *grado* $Q(x)$



La recta $y = l$ es **asíntota horizontal**.

II. *grado de* $P(x)$ = *grado de* $Q(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = l$. La recta $y = l$ es **asíntota horizontal**.

Para hallar la posición de la curva respecto de la asíntota, estudiamos el signo de la diferencia $\dfrac{P(x)}{Q(x)} - l$ para un valor grande de x.

TEN EN CUENTA

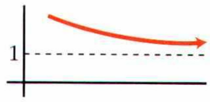
La posición de la curva respecto de la asíntota también se puede hallar con calculadora dándole a x un valor grande.

Por ejemplo, para $x = 1\,000$ la diferencia es 0,002, positiva.

Por ejemplo, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-2x} = 1$. La recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

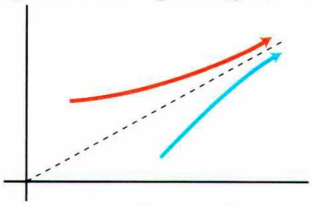
Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - l = \frac{x^2+1}{x^2-2x} - 1 = \frac{2x+1}{x^2-2x}$$



Esta diferencia es positiva para x grande. Por tanto, la curva se acerca a la asíntota por arriba.

grado $P(x)$ – *grado* $Q(x) = 1$



Hay una **asíntota oblicua**.

III. *grado de* $P(x)$ – *grado de* $Q(x) = 1$

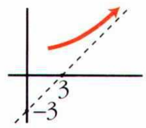
$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & mx+n \end{array} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = mx + n + \frac{R(x)}{Q(x)}; \quad y = mx + n + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

La recta $y = mx + n$ es asíntota (**asíntota oblicua**).

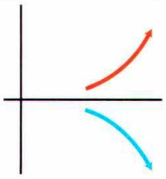
La posición de la curva respecto de la asíntota se averigua estudiando el signo de $R(x)/Q(x)$ para valores grandes de x.

Por ejemplo, $y = \dfrac{x^2-5x+7}{x-2} = x - 3 + \dfrac{1}{x-2}$

La recta $y = x - 3$ es asíntota. Observamos que, para valores grandes de x, $1/(x-2)$ es positivo. Por tanto, la curva queda por encima de la asíntota.



grado $P(x)$ – *grado* $Q(x) \ge 2$

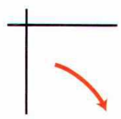


Hay una **rama parabólica**.

IV. *grado de* $P(x)$ – *grado de* $Q(x) \ge 2$

En este caso hay una **rama parabólica**, hacia arriba o hacia abajo según que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sea $+\infty$ o $-\infty$.

Por ejemplo, $y = \dfrac{x^3-5x^2}{-x+3}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-5x^2}{-x+3} = -\infty$



Tiene una rama parabólica hacia abajo.

EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Halla las ramas infinitas, $x \to +\infty$, de estas funciones. Sitúa la curva respecto a su asíntota:

a) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ b) $y = \dfrac{x^3}{1+x^2}$

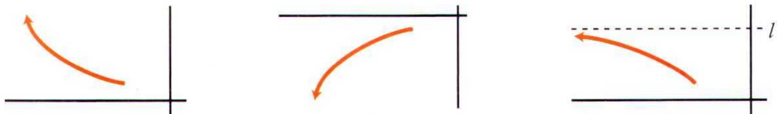
4. Halla las ramas infinitas, $x \to +\infty$, de estas funciones. Sitúa la curva respecto a sus asíntotas, si las hay:

a) $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$ b) $y = \dfrac{2x^3-3x^2+7}{x}$

11.7 COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCIÓN CUANDO $x \to -\infty$

Se dice que $x \to -\infty$ cuando los valores que le damos se alejan hacia la parte negativa del eje de las X. Por ejemplo, –10, –1 000, –10 000, …

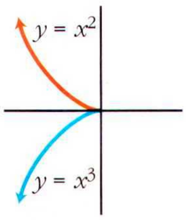
Las definiciones, razonamientos y procedimientos sobre los límites cuando $x \to -\infty$ son similares a los que se han hecho para límites cuando $x \to +\infty$. Vamos a resumir los fundamentales.



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$



Para el cálculo de límites de funciones polinómicas y racionales, basta razonar sobre las potencias de números negativos:

Si n es par, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$, y si n es impar, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.

Teniendo esto en cuenta y manejando correctamente la regla de los signos, los procedimientos para el cálculo de límites de funciones polinómicas y racionales son idénticos a los ya vistos para el caso de $x \to +\infty$. Otro tanto ocurre con las asíntotas y demás ramas infinitas.

TEN EN CUENTA

Una vez obtenidas todas las ramas infinitas ($x \to -\infty$, verticales y $x \to +\infty$), nos encontramos con la sorprendente y agradable peculiaridad de las funciones racionales de que, con solo esta información, casi siempre podremos conocer la forma de la curva con notable claridad.

- En general, todos los límites cuando $x \to -\infty$ se resuelven de forma similar a los $x \to +\infty$, teniendo en cuenta la regla de los signos.
- La obtención de las asíntotas horizontales y oblicuas para $x \to -\infty$, y la posición de la curva respecto a ellas, es similar a lo ya visto.
- Si la función es cociente de dos polinomios y tiene asíntota horizontal u oblicua para $x \to +\infty$, tiene la misma asíntota para $x \to -\infty$.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar los límites cuando $x \to -\infty$ de:*

a) $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7$

b) $f(x) = \dfrac{3}{-5x^2 + 7x + 2}$

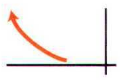
c) $f(x) = \dfrac{-x^3 + 2x^2 + 7}{x^2 - 2x + 3}$

d) $f(x) = \dfrac{7x^3 + 2x^2 - 1}{-2x^3 + 11}$

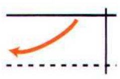
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 - 5x^2 + 7) = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^3 = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{-5x^2 + 7x + 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{-5x^2} = 0$, tomando valores negativos.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3 + 2x^2 + 7}{x^2 - 2x + 3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$



d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7x^3 + 2x^2 - 1}{-2x^3 + 11} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7x^3}{-2x^3} = \dfrac{7}{-2} = -\dfrac{7}{2}$



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halla $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y representa la rama correspondiente:

$$f(x) = -2x^3 + 7x^4 - 3$$

2. Halla $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y traza las ramas correspondientes:

a) $f(x) = (x^2 + 3)/(-x^3)$ b) $f(x) = -x^3/(x^2 + 3)$

EJERCICIOS RESUELTOS

2. *Hallar la rama infinita correspondiente a $x \to -\infty$ para las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2}{-x + 3}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

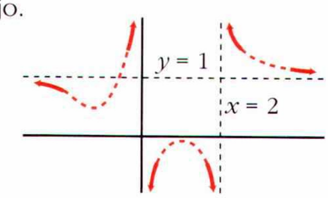
Obtenemos la misma asíntota horizontal, $y = 1$, que obtuvimos para $x \to +\infty$ (véase página 287). La posición de la curva respecto de la asíntota se averigua de forma similar para valores "muy negativos" de x:

Para $x = -1\,000$:

$$f(-1\,000) - 1 = \frac{(-1\,000)^2 + 1}{(-1\,000)^2 - 2 \cdot (-1\,000)} - 1 = -0{,}00199 < 0$$

La curva se acerca a la asíntota por debajo.

Si completamos esta información con la que ya teníamos (páginas 285 y 287), se puede insinuar la forma final de la curva.



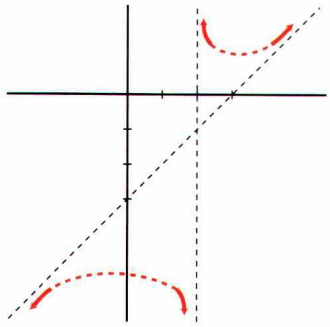
b) Como *grado del numerador = grado del denominador + 1,* tiene asíntota oblicua, la misma que obtuvimos en la página 287:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = x - 3 + \frac{1}{x - 2}$$

La diferencia entre curva y asíntota, $\dfrac{1}{x - 2}$, es negativa cuando $x \to -\infty$.

Por tanto, la curva se aproxima a la asíntota por debajo.

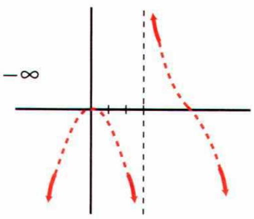
Si unimos esta información a la que ya obtuvimos en las páginas 285 y 287, se puede insinuar la forma de la curva.



c) Puesto que el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador, hay ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 5x^2}{-x + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{-x} = \lim_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty$$

Si añadimos a esta rama parabólica las demás ramas infinitas, podemos adivinar la forma de la curva.



EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Halla las ramas infinitas, $x \to -\infty$, de estas funciones, y sitúa la curva respecto a las asíntotas:

a) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ b) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

c) $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$ d) $y = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$

4. Halla las ramas infinitas, cuando $x \to -\infty$, y si tienen asíntotas, sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = \dfrac{x^4}{x^2 + 1}$ b) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

c) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$ d) $y = \dfrac{2x^3 - 3x^2}{x}$

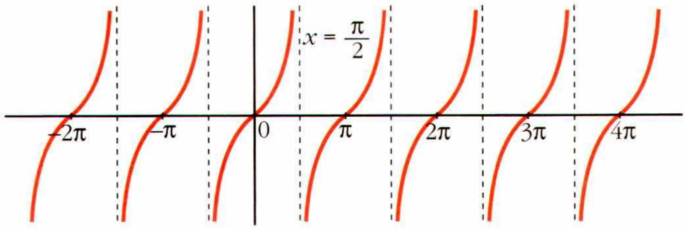
11.8 RAMAS INFINITAS EN LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Funciones trigonométricas

Las **funciones trigonométricas**, $y = sen\, x$, $y = cos\, x$, $y = tg\, x$, por ser periódicas, no tienen límite (ni finito ni infinito) cuando $x \to +\infty$ ni cuando $x \to -\infty$. Sin embargo, la función $y = tg\, x$ sí tiene infinitas asíntotas verticales:

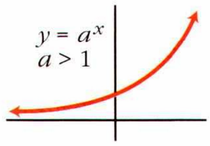
RECUERDA

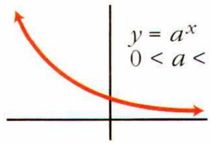
Las rectas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k entero, son asíntotas de la función $y = tg\, x$.



Funciones exponenciales

Las **funciones exponenciales** tienen una asíntota horizontal y una rama parabólica.



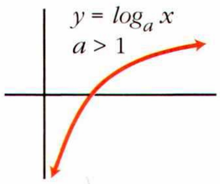


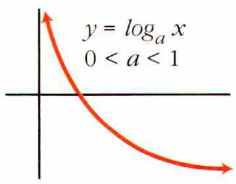
El eje X es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.
Tiene una rama parabólica cuando $x \to +\infty$.
No tiene asíntotas verticales, pues es continua en todo $\mathbb{R}$.

El eje X es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.
Tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$.
No tiene asíntotas verticales, pues es continua en todo $\mathbb{R}$.

Funciones logarítmicas

Las **funciones logarítmicas** tienen una asíntota vertical y una rama parabólica.





El eje Y es asíntota vertical:

$$\lim_{x \to 0^+} log_a\, x = -\infty$$

No tiene más asíntotas verticales.

Tiene una rama parabólica cuando $x \to +\infty$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

No está definida para $x \leq 0$.

El eje Y es asíntota vertical:

$$\lim_{x \to 0^+} log_a\, x = +\infty$$

No tiene más asíntotas verticales.

Tiene una rama parabólica cuando $x \to +\infty$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

No está definida para $x \leq 0$.

En tu CD se te explica cómo trabajar: con **DERIVE** (1) y con **CALCULADORA GRÁFICA** (2) algunos aspectos de esta unidad.

1 Límite en un punto

Calcula el límite cuando $x \to -1$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ x + 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

¿Es f discontinua en algún punto?

• Para calcular $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$, tenemos que ver si coinciden los límites laterales, pues f está definida de diferente forma por la izquierda y por la derecha de $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (3x + 5) = 2 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x + 3) = 2 \end{array}\right\} \text{Por tanto: } \lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$$

• f no es continua en $x = -1$ porque no coincide $f(-1) = 0$ con $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$. No tiene más puntos de discontinuidad por estar definida mediante funciones polinómicas, que son continuas.

2 Función continua en un punto

Halla el valor de k para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 + 6x}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ k & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

sea continua en $x = -2$.

A la izquierda y a la derecha de –2, la función está definida de la misma forma. Por tanto:

$$\lim\limits_{x \to -2} \frac{3x^2 + 6x}{x + 2} = \frac{0}{0} \to \lim\limits_{x \to -2} \frac{3x(x + 2)}{x + 2} = -6$$

Para que f sea continua en $x = -2$, debe cumplirse que:

$$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) = k \to \boxed{k = -6}$$

3 Límites en el infinito

Estudia, con una tabla de valores, el límite de estas funciones cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$:

a) $f(x) = \sqrt[3]{9x + 10}$

b) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 2}$

c) $f(x) = 2^x$

a) • Calculamos los valores de $f(x)$ para algunos valores de x cada vez más grandes $(x \to +\infty)$.

x	10^3	10^6	10^8	10^{10}
f(x)	20,8	208	965,5	4 481,4

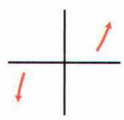
Podemos conseguir que los valores de $f(x)$ sean tan grandes como queramos, dando a x valores suficientemente grandes.

Luego, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{9x + 10} = +\infty$.

• Para $x \to -\infty$

x	-10^3	-10^6	-10^{10}
f(x)	–20,8	–208	–4 481,4

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{9x + 10} = -\infty$



f tiene ramas parabólicas hacia $+\infty$ y hacia $-\infty$.

b)

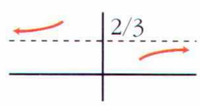
x	10^2	10^3	10^4
f(x)	0,6589	0,6658	0,66658

Cuanto más grande sea x, los valores de $f(x)$ serán más próximos a $0,\hat{6}$ y todos ellos menores que $0,\hat{6}$.

x	-10^2	-10^3	-10^4
f(x)	0,674	0,667	0,6667

Si $x \to -\infty$, también $f(x) \to 0,\hat{6}$ pero los valores de y son ahora mayores que $0,\hat{6}$.

Luego, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x - 1}{3x + 2} = \dfrac{2}{3}$.



La recta $y = \dfrac{2}{3} = 0,\hat{6}$ es una asíntota horizontal.

c)

x	10	100	1 000
f(x)	1 024	$1{,}27 \cdot 10^{30}$	Error

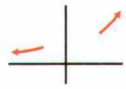
← ($2^{1\,000}$ es tan grande que la calculadora no puede hallarlo). $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$

x	–10	–100	–1 000
f(x)	0,0009	$7{,}8 \cdot 10^{-31}$	0

← ($2^{-1\,000}$ es tan próximo a 0 que la calculadora lo identifica con 0). $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$

Tiene una rama parabólica hacia $+\infty$.

La recta $y = 0$ es una asíntota de la función hacia $-\infty$.



4 Cálculo de límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$

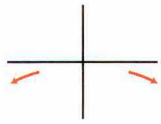
Halla los límites, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, de las siguientes funciones:

***a)** $f(x) = \dfrac{3x - x^4}{x^2 + 1}$*

***b)** $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2}$*

***c)** $f(x) = \dfrac{3x - 1}{2 - x}$*

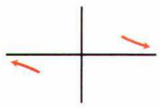
a)
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - x^4}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x - x^4}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2) = -\infty \end{array}\right\}$$



Como el grado del numerador es mayor que el del denominador y los coeficientes de los términos de mayor grado son de distinto signo, el límite es $-\infty$.

La función $f(x) = \dfrac{3x - x^4}{x^2 + 1}$ tiene ramas parabólicas hacia abajo.

b)
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \end{array}\right\}$$



Como el grado del numerador es menor que el del denominador, el límite es 0. La recta $y = 0$ (eje X) es asíntota horizontal. Para saber si la función está por encima o por debajo del eje X, estudiamos el signo de la función para $x = 100$ y $x = -100$, por ejemplo.

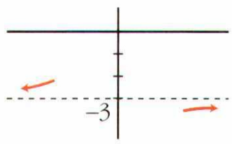
c)
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 1}{2 - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{-x} = -3 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x - 1}{2 - x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{-x} = -3 \end{array}\right\}$$ $y = -3$ es una asíntota horizontal.

Como el grado del numerador es igual que el del denominador, el límite es el cociente entre los coeficientes de los términos de mayor grado.

Para **estudiar la posición**, calculamos algún punto de la función para valores grandes de x. Por ejemplo: (100; –3,05) y (–100; – 2,95)

La curva está bajo la asíntota cuando $x \to +\infty$ y sobre la asíntota cuando $x \to -\infty$.

O bien estudiamos el signo de la diferencia entre la curva y la asíntota $\left[\dfrac{3x - 1}{2 - x} - (-3)\right]$ para valores grandes de x.



5 Ramas infinitas y asíntotas

Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones.

Cuando tengan asíntotas, estudia la posición de la curva respecto a ellas.

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x - 2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{(x - 1)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x}$

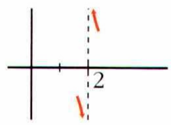
e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 2}$

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x - 2}$

- Asíntotas verticales: $x = 2$ es asíntota vertical, porque $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \pm\infty$.

  Si $x \to 2^-$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{-} < 0\right)$, $f(x) \to -\infty$.

  Si $x \to 2^+$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{+} > 0\right)$, $f(x) \to +\infty$.



- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

  No tiene asíntotas horizontales. Tiene ramas parabólicas hacia arriba.

- No tiene asíntota oblicua porque el grado del numerador es 2 unidades mayor que el del denominador.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$

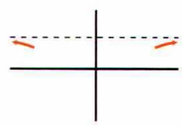
- No tiene asíntotas verticales porque no hay ningún valor que anule el denominador $(x^2 + 4 \neq 0)$. Es una función continua en $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

  $y = 1$ es una asíntota horizontal. Para determinar la posición de la curva y la asíntota, estudiamos la diferencia entre las ordenadas de ambas:

  $$d = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4} - 1 = \frac{x^2 - 1 - x^2 - 4}{x^2 + 4} = \frac{-5}{x^2 + 4}$$

  Tanto si $x \to +\infty$ como si $x \to -\infty$, $d < 0$, lo que indica que la ordenada de la curva es menor que la de la asíntota.



  La curva se acerca a la asíntota por debajo.

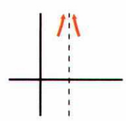
- No puede tener asíntota oblicua porque son iguales los grados del numerador y del denominador.

c) $f(x) = \dfrac{x}{(x - 1)^2}$

- Asíntota vertical: $x = 1$, pues $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{(x - 1)^2} = \infty$

  Si $x \to 1^-$, $f(x) \to +\infty$.

  Si $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$.



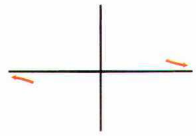
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

  $y = 0$ es una asíntota horizontal.

  Si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$.

  Si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$.



d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x}$

- Asíntotas verticales: $x^2 - 3x = 0 \to x(x-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

  $x = 0$ es asíntota vertical porque $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2 - 3x} = \pm\infty$

  Si $x \to 0^-$, $f(x) \to +\infty$.

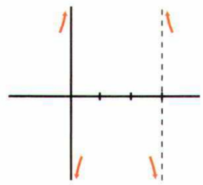
  Si $x \to 0^+$, $f(x) \to -\infty$.

  $x = 3$ es asíntota vertical, ya que:

  $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x^2 - 3x} = \pm\infty$

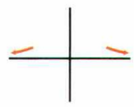
  Si $x \to 3^-$, $f(x) \to -\infty$.

  Si $x \to 3^+$, $f(x) \to +\infty$.



- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2 - 3x} = 0$. $y = 0$ es asíntota horizontal.

  $\left.\begin{array}{l} \text{Si } x \to +\infty,\ f(x) > 0 \\ \text{Si } x \to -\infty,\ f(x) > 0 \end{array}\right\}$ La curva está por encima de la asíntota.



e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 2}$

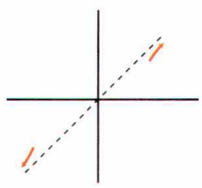
No tiene asíntotas verticales, porque $x^2 + 2 \neq 0$.

- Como el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador, tiene una asíntota oblicua.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2 + 2 \\ \cline{2-2} -x^3 - 2x & x \\ \hline -2x & \end{array} \qquad f(x) = \frac{x^3}{x^2+2} = x - \frac{2x}{x^2+2}$$

La recta $y = x$ es asíntota oblicua.

x	100	–100
y (asíntota)	100	–100
f(x) (curva)	99,98	–99,98

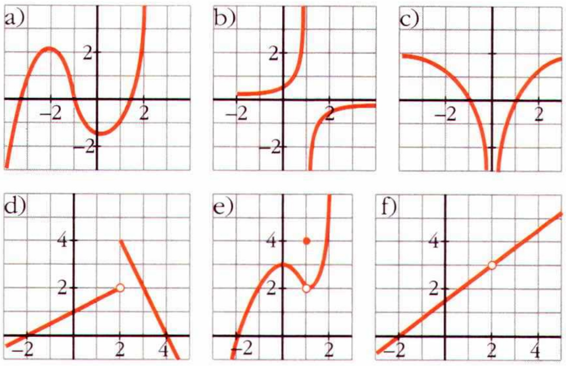


PARA PRACTICAR

Discontinuidades y continuidad

1 a) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función continua?

b) Señala, en cada una de las otras cinco, la razón de su discontinuidad.



2 Halla los puntos de discontinuidad, si los hay, de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + x - 6$

b) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e) $y = \dfrac{2}{5x - x^2}$

f) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2}$

3 Comprueba si las siguientes funciones son continuas en $x = 0$ y en $x = -2$:

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

b) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

d) $y = \sqrt{7 - 2x}$

4 Indica para qué valores de $\mathbb{R}$ son continuas las siguientes funciones:

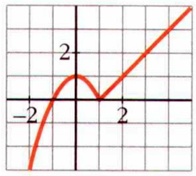
a) $y = 5 - \dfrac{x}{2}$ b) $y = \sqrt{x-3}$

c) $y = \dfrac{1}{x}$ d) $y = \sqrt{-3x}$

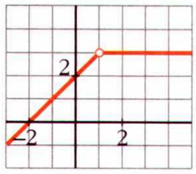
e) $y = \sqrt{5 - 2x}$ f) $y = x^2 - x$

5 Comprueba que las gráficas de estas funciones corresponden a la expresión analítica dada y di si son continuas o discontinuas en $x = 1$.

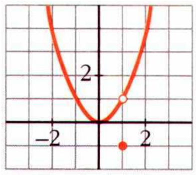
a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \ne 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



6 Comprueba si la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

es continua en $x = 0$.

Recuerda que para que f sea continua en $x = 0$, debe verificarse que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

7 Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} (3 - x)/2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ en $x = -1$

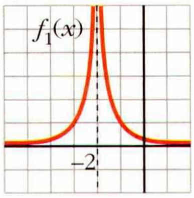
b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ (x/2) - 3 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ en $x = 2$

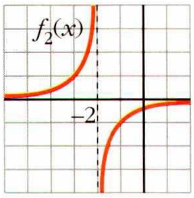
c) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \le 1 \\ x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Visión gráfica del límite

8





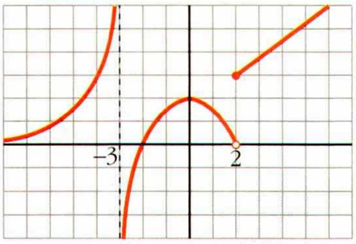
Estas son, respectivamente, las gráficas de las funciones:

$$f_1(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \frac{-1}{x+2}$$

¿Cuál es el límite de cada una de estas funciones cuando $x \to -2$?

☛ *Observa la función cuando $x \to -2$ por la izquierda y por la derecha.*

9 Sobre la gráfica de la función $f(x)$, halla:



a) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ h) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

Límite en un punto

10 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(5 - \frac{x}{2}\right)$ b) $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - x)$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1-x}{x-2}$ d) $\lim\limits_{x \to 0,5} 2^x$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{10 + x - x^2}$ f) $\lim\limits_{x \to 4} \log_2 x$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$ h) $\lim\limits_{x \to 2} e^x$

11 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, halla:

a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

☛ *Para que exista límite en el punto de ruptura, tienen que ser iguales los límites laterales.*

12 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x}{x^2 - 2x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2 + 3x}{x}$

c) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{3h^3 - 2h^2}{h}$ d) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{h^2 - 7h}{4h}$

☛ *Saca factor común y simplifica cada fracción.*

13 Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$ d) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

e) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$ f) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

14 Calcula el límite de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x}$ en $x = 3$, $x = 0$ y $x = -1$.

Límite cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$

15 Calcula los siguientes límites y representa la información que obtengas:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 + x - x^3)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 10x - 32}{5}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{x^4}{3} + \frac{x}{2} - 17\right)$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 - x)^2$

☛ *Dale a x "valores grandes" y saca conclusiones.*

16 Calcula el límite de las funciones del ejercicio anterior cuando $x \to -\infty$ y representa la información que obtengas.

17 Comprueba, dando valores grandes a x, que las siguientes funciones tienden a 0 cuando $x \to +\infty$.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 10}$ b) $f(x) = \frac{100}{3x^2}$

c) $f(x) = \frac{-7}{\sqrt{x}}$ d) $f(x) = \frac{2}{10x^2 - x^3}$

18 Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de cada una de las siguientes funciones. Representa los resultados que obtengas.

a) $f(x) = x^3 - 10x$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \frac{3 - x}{2}$ d) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{-3}$

19 Calcula los siguientes límites y representa las ramas que obtengas:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2-1}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+2}$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+3}$ h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x}$

20 Calcula el límite de todas las funciones del ejercicio anterior cuando $x \to -\infty$.

21 Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{(x-1)^2}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 1-(x-2)^2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x}{(2x+1)^2}$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+1}{5x}$

22 Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones y representa las ramas que obtengas:

a) $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ b) $f(x) = 10x - x^3$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ d) $f(x) = \dfrac{1-12x^2}{3x^2}$

Asíntotas

23 Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

a) $y = \dfrac{2x}{x-3}$ b) $y = \dfrac{x-1}{x+3}$

c) $y = \dfrac{2x+3}{4-x}$ d) $y = \dfrac{2}{1-x}$

24 Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2+4}$ b) $y = \dfrac{3}{x^2+1}$

c) $y = \dfrac{2x^2-1}{x^2}$ d) $y = \dfrac{x^4}{x-1}$

25 Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x-3}$ b) $f(x) = \dfrac{3x}{2x-5}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+9}$

e) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$ f) $f(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$

26 Cada una de las siguientes funciones tiene una asíntota oblicua. Hállala y estudia la posición de la curva respecto a ella:

a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{3+x-x^2}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{4x^2-3}{2x}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-3}$

e) $f(x) = \dfrac{2x^3-3}{x^2-2}$ f) $f(x) = \dfrac{-2x^2+3}{2x-2}$

PARA RESOLVER

27 Calcula los límites de las siguientes funciones en los puntos que anulan su denominador:

a) $f(x) = \dfrac{3x}{2x+4}$ b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$ d) $f(t) = \dfrac{t^3-2t^2}{t^2}$

28 Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

a) $y = \dfrac{(3-x)^2}{2x+1}$ b) $y = \dfrac{5x-2}{2x-7}$

c) $y = \dfrac{x+2}{x^2-1}$ d) $y = \dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

e) $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ f) $y = \dfrac{3x^2}{x+2}$

29 Halla las ramas infinitas de estas funciones. Cuando tengan asíntotas, sitúa la curva:

a) $y = \dfrac{x^4-1}{x^2}$ b) $y = \dfrac{(x+3)^2}{(x+1)^2}$

c) $y = \dfrac{1}{9-x^2}$ d) $y = \dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$

e) $y = \dfrac{2x^2}{x+3}$ f) $y = \dfrac{x^3}{2x-5}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

30 Prueba que la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$ solo tiene una asíntota vertical y otra horizontal.

☛ *Al hallar* $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ *verás que no es* ∞.

31 Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

32 Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$ d) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$

33 Halla las asíntotas de estas funciones:

a) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ b) $y = x^2 + \frac{1}{x}$

c) $y = \frac{2x^2 + 5}{x^2 - 4x + 5}$ d) $y = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$

e) $y = x + \frac{4}{x - 5}$ f) $y = x + 1 + \frac{5}{x}$

34 Representa las siguientes funciones y explica si son discontinuas en alguno de sus puntos:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

35 a) Calcula el límite de las funciones del ejercicio anterior en $x = -3$ y $x = 5$.

b) Halla, en cada una de ellas, el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

36 Calcula los límites cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2^{x - 1}$ b) $f(x) = 0{,}75^x$

c) $f(x) = 1 + e^x$ d) $f(x) = 1/e^x$

37 Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones exponenciales:

a) $y = 2^{x + 3}$ b) $y = 1{,}5^x - 1$

c) $y = 2 + e^x$ d) $y = e^{-x}$

38 Calcula, en cada caso, el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

39 Estudia la continuidad de estas funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -1 \geq x \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2^{x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

40 Calcula a para que las siguientes funciones sean continuas en $x = 1$:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$

41 En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función $M(t) = \frac{30t}{t + 4}$ (t en días).

a) ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Y el décimo?

b) Representa la función sabiendo que el periodo de entrenamiento es de un mes.

c) ¿Qué ocurriría con el número de montajes si el entrenamiento fuera mucho más largo?

CUESTIONES TEÓRICAS

42 ¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que la función no esté definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto?

43 ¿Puede tener una función más de dos asíntotas verticales? ¿Y más de dos asíntotas horizontales? Pon ejemplos.

44 El denominador de una función $f(x)$ se anula en $x = a$. ¿Podemos asegurar que tiene una asíntota vertical en $x = a$? Pon ejemplos.

45 Si $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$, ¿podemos afirmar que f es continua en $x = 2$?

46 Representa una función que verifique estas condiciones. ¿Es discontinua en algún punto?

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

PARA PROFUNDIZAR

47 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}}$

48 Halla un valor de x para el cual $f(x) = \dfrac{1}{3x-5}$ sea menor que 0,001.

49 Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - x)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2^x - x^3)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x}$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}75^x - x)$

50 ¿Cuál es la asíntota vertical de estas funciones logarítmicas? Halla su límite cuando $x \to +\infty$:

a) $y = log_2(x-3)$ b) $y = ln(x+2)$

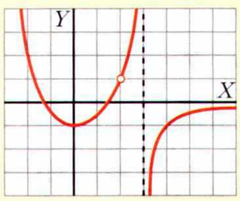
AUTOEVALUACIÓN

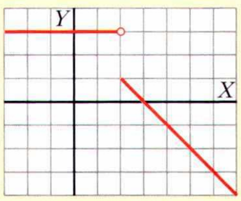
1. Calcula el límite de $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \le 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$

en los puntos de abscisas 0, 3 y 5. Di si la función es continua en esos puntos.

2. Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{x-1}$ b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$ c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{(x-4)^2}$

3. a) 

b) 

Sobre la gráfica de estas dos funciones, halla, en cada caso, los siguientes límites

$$\lim_{x \to 3} f(x); \quad \lim_{x \to 2} f(x); \quad \lim_{x \to +\infty} f(x); \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

4. Halla las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 2x}$ y estudia la posición de la curva respecto a ellas.

5. Justifica qué valor debe tomar a para que la función sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

6. Halla el límite de $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6}$ cuando $x \to 3$; $x \to 2$; $x \to +\infty$; $x \to -\infty$ y representa la información que obtengas.

7. Representa una función que cumpla las siguientes condiciones:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

8. Estudia las ramas infinitas de $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+4}$ y sitúa la curva respecto a su asíntota.

3. En tu CD puedes encontrar las resoluciones de todos estos ejercicios.

12 INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

El **concepto de derivada** surgió como resultado de algunos siglos de esfuerzo dirigidos a resolver dos problemas: determinar la recta tangente a una curva en uno de sus puntos y encontrar velocidades instantáneas en movimientos no uniformes. Estos problemas interesaron a los matemáticos desde tiempos antiguos, pero hasta el siglo XVI, la resolución de cada problema particular se hacía mediante un método específico no generalizable a otros problemas similares.

En el siglo XVII, los conocimientos acumulados hasta entonces permitieron a Newton y Leibnitz dar una respuesta teórica y completa a todos estos tipos de problemas, mediante la invención de la derivada. Un siglo después, Euler contribuyó a mejorarla. No obstante, la base lógica y, por tanto, los conceptos formales desarrollados por estos matemáticos fueron insuficientes para que el cálculo de derivadas fuera un proceso claro y sistemático. Fue Cauchy, a comienzos del siglo XIX, quien, al relacionar de forma clara el concepto de derivada con el de límite, consiguió un respaldo formal básico gracias al cual el cálculo de derivadas se redujo a sencillas operaciones formales. Tanto es así, que un estudiante actual de Bachillerato maneja estos procedimientos con mayor soltura que los grandes matemáticos anteriores a Cauchy.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)